

# Caracterización de un retardador lineal con errores de primer orden mediante los coeficientes de las matrices de *Pauli*

David Pereda Cubián

Departamento TEISA  
Universidad de Cantabria

José Luis Arce Diego

Departamento TEISA  
Universidad de Cantabria

## ABSTRACT

The coefficients of the *Pauli* matrices decomposition are calculated for a linear retarder and their variation in the case with first-order errors into the device is shown.

## 1. INTRODUCCIÓN

La matriz de *Jones* proporciona mucha información sobre un dispositivo óptico, pero no sirve para describir claramente su comportamiento. Las matrices de *Pauli* permiten descomponer de la matriz de *Jones* en cuatro coeficientes, denominados *Quaternions*, que muestran el grado de comportamiento como elemento birrefringente o dicroico de un dispositivo óptico. Los dispositivos reales introducen efectos no deseados que producen la variación de estos parámetros. El objetivo de este artículo es mostrar la variación de los *Quaternions* en un retardador lineal en presencia de efectos no ideales de primer orden, mostrando su variación respecto del caso ideal.

## 2. MATRICES DE PAULI

Las matrices de *Jones* [1] se pueden descomponer sin ambigüedades mediante una base de cuatro matrices, denominadas matrices de *Pauli* [2], en cuatro componentes de la siguiente manera [3]:

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \xi_0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \xi_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \xi_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \xi_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Estos cuatro coeficientes,  $\xi_0$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  y  $\xi_3$ , se conocen como *Quaternions*, y se pueden obtener fácilmente a partir de los elementos de la matriz de *Jones* a través de una expresiones que se pueden expresar como:

$$\xi_0 = \frac{a+d}{2} \quad \xi_1 = -i \cdot \frac{b+c}{2} \quad \xi_2 = \frac{b-c}{2} \quad \xi_3 = -i \cdot \frac{a-d}{2} \quad (2)$$

Las matrices de *Pauli* se pueden asociar con fenómenos físicos, ya que cada una es la matriz de *Jones* de un dispositivo ideal conocido [4]. Por lo tanto, los *Quaternions* se pueden relacionar directamente con cada uno de estos efectos, es decir, pueden verse como una medida del grado de comportamiento del dispositivo óptico como cada uno de estos dispositivos:

$\xi_0$	→	Retardo de fase
$\xi_1$	→	Birrefringencia lineal 45° (ó -45°) al eje $x$
$\xi_2$	→	Birrefringencia circular
$\xi_3$	→	Birrefringencia lineal 0° (ó 90°) al eje $x$

Tabla 1: Representación física de cada *Quaternion*.

En dispositivos reales, estos coeficientes pueden ser complejos. Si toman valores no reales, esto muestra la presencia de algún tipo de dicroísmo o de atenuación en el dispositivo. Para cada *Quaternion*, la parte imaginaria tiene un significado diferente:

$\text{Imag}(\xi_0)$	→	Atenuación
$\text{Imag}(\xi_1)$	→	Dicroísmo lineal 45° (ó -45°) al eje $x$
$\text{Imag}(\xi_2)$	→	Dicroísmo circular
$\text{Imag}(\xi_3)$	→	Dicroísmo lineal 0° (ó 90°) al eje $x$

Tabla 2: Representación física de las partes imaginarias de los *Quaternions*.

## 3. QUATERNIONS DE UN RETARDADOR LINEAL

La matriz de *Jones* de un retardador lineal ideal es:

$$J = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \cdot e^{-i\delta} & \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot (1 - e^{-i\delta}) \\ \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot (1 - e^{-i\delta}) & \cos^2(\theta) \cdot e^{-i\delta} + \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (3)$$

donde  $\theta$  es el eje de birrefringencia lineal y  $\delta$  su valor. En este caso, y aplicacando las expresiones anteriormente descritas, las expresiones de los *Quaternions* serán las siguientes:

$$\begin{cases} \xi_0 = \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \\ \xi_1 = \sin(2\theta) \cdot \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \\ \xi_2 = 0 \\ \xi_3 = \cos(2\theta) \cdot \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \end{cases} \quad (4)$$

### 3.1. Análisis del retardador lineal con errores de primer orden

Los errores de primer orden que pueden producirse en un dispositivo de este tipo son:

- Actividad óptica,  $\phi$
- Dicroísmo,  $\alpha$

La introducción de los errores en la matrix de Jones se realiza mediante el siguiente producto matricial [5]:

$$J' = A \cdot B \cdot A^* \quad (5)$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \cdot \phi \\ i \cdot \phi & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \cdot \zeta & \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot (1 - \zeta) \\ \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot (1 - \zeta) & \cos^2(\theta) \cdot \zeta + \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (7)$$

donde se ha tomado la expresión:

$$\zeta = e^{-\alpha} \cdot e^{-i\delta} \quad (8)$$

De esta manera, el resultado final vendrá dado por:

$$J' = \begin{pmatrix} S_A & S_B \\ S_B & S_C \end{pmatrix} \quad (9)$$

donde:

$$\begin{aligned} S_A &= \cos^2(\theta) \cdot (1 + \zeta \cdot \phi^2) + \sin^2(\theta) \cdot (\zeta + \phi^2) \\ S_B &= \frac{1}{2} \sin(2\theta) \cdot (1 + \phi^2) \cdot (1 - \zeta) - \cos(2\theta) \cdot (i \cdot \phi) \cdot (1 - \zeta) \\ S_C &= \cos^2(\theta) \cdot (\zeta + \phi^2) + \sin^2(\theta) \cdot (1 + \zeta \cdot \phi^2) \end{aligned} \quad (10)$$

Por lo tanto, tomando las mismas expresiones que en el caso anterior, los *Quaternions* del retardador ideal, teniendo en cuenta los errores de primer orden, serán:

$$\begin{cases} \xi_0 = \frac{1}{2} \cdot (1 + \phi^2) \cdot (1 + \zeta) \\ \xi_1 = -\frac{i}{2} \sin(2\theta) \cdot (1 + \phi^2) \cdot (1 - \zeta) \\ \xi_2 = -\cos(2\theta) \cdot (i \cdot \phi) \cdot (1 - \zeta) \\ \xi_3 = -\frac{i}{2} \cdot \cos(2\theta) \cdot (1 - \phi^2) \cdot (1 - \zeta) \end{cases} \quad (11)$$

Se puede ver que estas expresiones, haciendo nulos los valores de los efectos no ideales, coinciden con los del caso ideal.

### 3.2. Representación de los Quaternions

A continuación en la figura 1 se representan los *Quaternions* de retardador lineal en el caso ideal, suponiendo un valor de  $\theta = 30^\circ$ . En el caso de existencia de errores de primer orden, y suponiendo unos valores de  $\phi = 0.25 \text{ rad/m}$  y  $\alpha = 0.5 \text{ m}^{-1}$ , la variación de los *Quaternions* del retardador lineal, en sus partes tanto real como imaginaria, con la birrefringencia lineal será tal y como se puede ver en la figura 2. Como se observa dicha figura, se produce una variación significativa del valor de los todos los *Quaternions* en su parte real y la aparición de una parte imaginaria con la introducción de los errores de primer orden. Por lo tanto, debido

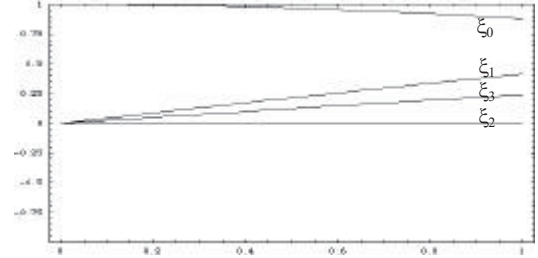


Figura 1: *Quaternions* de un retardador lineal ideal.

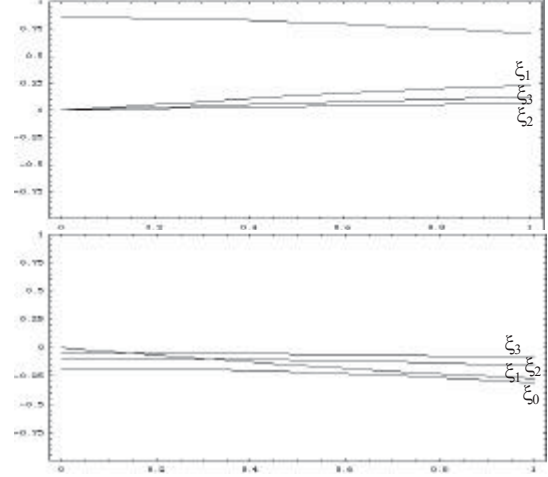


Figura 2: Variación de los *Quaternions*; a) parte real, b) parte imaginaria, de un retardador lineal.

a su relación con los *Quaternions*, es fundamental tener en cuenta el valor de estos parámetros de error para una correcta caracterización de las propiedades birrefringentes y dicroicas del dispositivo.

## 4. CONCLUSIONES

Se ha estudiado la variación del comportamiento de un retardador lineal en el caso de la existencia de errores de primer orden, dicroísmo y actividad óptica. A partir de la matriz del dispositivo, se han hallado los *Quaternions* que caracterizan el dispositivo y se ha analizado su variación para unos determinados valores de error, viendo la importancia sobre las características birrefringentes y dicroicas que tienen, y por lo tanto, la gran importancia que presentan para realizar una correcta descripción del funcionamiento del dispositivo.

## 5. REFERENCIAS

- [1] A.Gerard, J.M.Burch, "Introduction to matricial methods in optics", John Wiley & Sons, 1975.
- [2] D.Bohm. "Quantum Theory". Dover, 1989.
- [3] C.Vlcek et col., "Dependence of the Jones matrix elements of fiber on the polarization modes coupling owing to the torsion", Proceedings of SPIE, Vol.4016 (2000).
- [4] D.Pereda Cubián et col., "Variation of the Pauli matrices coefficients in Nd-doped fibers subjected to a magnetic field". LEOS'2001, San Diego, CA., November 2001.
- [5] ShiFang Li, "Jones-matrix with Pauli matrices: application to ellipsometry", JOSA. A, Vol 17, N° 5, 2000.